2)

a) (I_p) décroissante

$\Rightarrow I_{p+1} \le I_p$

$\Rightarrow I_{p+1} + \frac{p+1}{3} I_p \le I_p + \frac{p+1}{3} I_p$

$\Rightarrow \frac{e^3}{3} \le \frac{p+4}{3} I_p$

$\Rightarrow \boxed{\frac{e^3}{p+4} \le I_p}$ (1)

* pour $p \ge 2$

On a : $I_p + \frac{p}{3} I_{p-1} = \frac{e^3}{3}$

D'après 1)b)

$I_p \le I_{p-1}$ car I_p □

$\Rightarrow \frac{p}{3} I_p \le \frac{p}{3} I_{p-1}$

$\Rightarrow I_p + \frac{p}{3} I_p \le I_p + \frac{p}{3} I_{p-1}$

$\Rightarrow \frac{p+3}{3} I_p \le \frac{e^3}{3}$

$\Rightarrow I_p \le \frac{e^3}{p+3}$

□ pour $p = 1$; $I_p = \frac{1}{9}\left(1 + 2e^3\right) \le \frac{e^3}{4}$

D'où $\boxed{I_p \le \frac{e}{p+3}}$ (2) ; pour $p \ge 1$

(1)+(2) $\Rightarrow \frac{e^3}{p+4} \le I_p \le \frac{e^3}{p+3}$

b) $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{e^3}{p+4} = \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{e^3}{p+3} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{p \to +\infty} I_p = 0$

* $\frac{p}{p+4} . e^3 \le p . I_p \le \frac{p}{p+3} . e^3$

$\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{p}{p+4} e^3 = \lim\limits_{p \to +\infty} \frac{p}{p+3} e^3 = e^3$

D'où $\lim\limits_{p \to +\infty} p . I_p = e^3$

EX 24 :

$f(x) = Ln(Lnx)$

1) $D_f =]1, +\infty[$

2) la fonction : $x \mapsto Lnx$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$

D'où f est dérivable sur $]1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{(Lnx)'}{Lnx} = \frac{1}{x.Lnx}$

3) $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k.Lnk}$; $x \ge 2$

$k \ge 2$

$k \le t \le k+1 \Rightarrow 0 \le Lnk \le Lnt$

$\Rightarrow 0 \le kLnk \le t.Lnt$

$\Rightarrow \frac{1}{tLnt} \le \frac{1}{k.Lnk}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \le \int_k^{k+1} \frac{1}{k.Lnk} dt$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t.Lnt} dt \le \frac{1}{k.Lnk}$

4) * $\int_2^{n+1} \frac{1}{tLnt} dt$

$= \int_2^{n+1} f'(t) dt = \left[f(t)\right]_2^{n+2}$

$= Ln\left(Ln(n+2)\right) - Ln(Ln2)$

* $\int_{(k)}^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \le \frac{1}{kLnk}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{tLnt} dt \le \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{kLnk}$

$\Rightarrow \int_2^{n+1} \frac{1}{tLnt} dt \le S_n$

$\Rightarrow S_n \ge Ln\left(Ln(n+2)\right) - Ln(Ln2)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} Ln\left(Ln(n+2)\right) - Ln(Ln2) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn